Domácí úkol ze cvičení 7:

1. Na cvičení jsme dokázali:

   a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = a,\ a<1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   Dokažte také tvrzení (také ze cvičení):

   b) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a,\ a<1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   A promyslete (a zkuste opět dokázat) :

   c) Je-li $a_n>0,\ n\in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a,\ a>1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

   d) Je-li $a_n>0,\ n\in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a,\ a>1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. Pomocí tvrzení a) nebo b) z příkladu 1 si ukažte, jak snadno se dokáže, že

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$ pro každé $x\in R$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n!} = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0\ \ (a>1)$.

3. Limita rekurentně zadané posloupnosti (užití věty o limitě monotónní posloupnosti):

   a) posloupnost $\{a_n\}$ definujeme rekurentně takto :

   (i) $a_1 = \sqrt{2}\ ,\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$;

   nebo (ii) $a_1 = 10\ ,\ a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$.

   Rozhodněte (aspoň u jedné z daných posloupností), zda existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, a pokud ano, spočítejte ji.

   (!! Je třeba ukázat, že daná posloupnost konverguje – ukažte si na „výpočtu“ limity rekurentně dané posloupnosti $\{a_n\}$: $a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = (-1)a_n$, jak to „dopadne“, pokud budete jen „počítat“ s tím, že posloupnost limitu má.)

4. Ukažte (užitím nutné podmínky konvergence řad), že divergují řady:

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2 ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \text{ nebo } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n .$$

5. Pokuste se sečíst řadu (nebo ukažte, že řada diverguje) :

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ (Rada: rozložte zlomek $\dfrac{1}{4n^2-1}$ na rozdíl dvou zlomků).

6. Rozhodněte o konvergenci , resp. divergenci, řady (užijte srovnávací kriterium) :

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot\sqrt{n}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}\ ;\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-1}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n^2+1}\right)^2 .$$